

FREKANS ANALİZİNDE ALTERNATİF BİR PARAMETRE TAHMİN METODU

¹Ömer Levend AŞIKOĞLU

¹Ege Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü, 35100 Bornova, İzmir

¹omer.asikoglu@ege.edu.tr

(Geliş/Received: 21.02.2017; Kabul/Accepted in Revised Form: 02.06.2017)

ÖZ: Taşkınlar, sağanaklar ve kurak akımlar gibi ekstrem hidrolojik olayların frekans analizi, su kaynakları sistemlerinin planlanması, boyutlandırılması ve işletilmesi açısından büyük önem arz ettiği gibi, bu ekstrem olayların ekonomik ve sosyal açıdan olumsuz sonuçlarından kaçınma konusunda da büyük fayda sağlamaktadır. Frekans analizinin önemli adımlarından biri uygun dağılım modelinin parametrelerinin tahmin edilmesidir. Bu makalede, merkezi eğilimin robust (sağlam) bir parametresi olan M (medyan), istatistiksel saçılmayı gösteren robust parametre IQR (kuartiller arası uzaklık) ve kuartil çarpıklık katsayısı QC_s istatistiklerini kullanan alternatif bir parametre tahmin metodu (RİM) (Robust İstatistikler Metodu) anlatılmaktadır. Çalışma kapsamında, özellikle hidrolojik frekans analizinde yaygın bir şekilde kullanılan altı farklı olasılık dağılım fonksiyonuna (Normal, 2 ve 3 parametrelili lognormal, Gamma, Gumbel, ve genelleştirilmiş ekstrem değer GEV) yer verilmiştir. Medyan ve kuartiller arası uzaklık gibi robust istatistiklerin kullanılmasının, aykırı gözlemlerin varlığından veya değişiminden kaynaklanan etkilere karşı daha güvenli parametre tahmini sağlayacağı düşünülmektedir. Çalışmada sayısal örnekler olarak, altı yağış istasyonunun 24 saat süreli yıllık maksimum yağış şiddeti verileri kullanılmıştır. Son olarak, Robust İstatistikler Metodu ile elde edilen parametreler kullanılarak hesaplanan belli olasılıklı tahminler (kuantiller), Maksimum Olabilirlik Metodu, Momentler Metodu ve Olasılık Ağırlıklı Momentler Metodu gibi geleneksel parametre tahmin metotlarıyla elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Hidrolojik Frekans Analizi, Parametre Tahmin Metotları, Robust İstatistikler

An Alternative Parameter Estimation Method in Frequency Analysis

ABSTRACT: Frequency analysis of extreme hydrologic events such as floods, storms, and droughts provides important information on planning, design, and management of water resources systems, and this information is helpful in avoiding negative economic and social consequences. An important step of the frequency analysis is to estimate the appropriate distribution's parameters. This paper shows the application of an alternative parameter-estimation method, RSM (Robust Statistics Method), which calculates the robust measure of central tendency M (median), statistical dispersion IQR (interquartile range) and quartile coefficient of skewness QC_s ; and uses these robust statistics by the estimation of the parameters of various distribution functions. Six probability distributions (Normal, 2- and 3- parameter lognormal, Gamma, Gumbel and generalized extreme value GEV), which are commonly used in hydrological frequency analysis were discussed within the study. The advantage of using robust statistics like median and interquartile range in parameter estimation is to ensure the resistance to the effect of a change in value or presence of outlying observations. Numerical analyses as part of this research were carried out on the annual maximum 24h rainfall intensities of rainfall gages in the Aegean Region (Turkey). Eventually, the quantile estimations calculated with the parameters of Robust Statistics Method were compared with the results of conventional methods like Maximum Likelihood, Method of Moments, and Probability-Weighted Moments.

Key Words: Frequency Analysis, Parameter Estimation Methods, Robust Statistics

GİRİŞ (INTRODUCTION)

Sağanaklar ve bunların sonucu olan taşkınlar gibi ekstrem olaylar, binlerce insanın ölümüne sebep olabileceği gibi, milyonlarca liralık da maddi hasara sebep olabilmektedirler. Ekstrem kurak akımlar ve kirleticiler de ekonomik, sosyal ve çevresel etkilere yol açabilirler. Hidrolojik çalışmalar, bu tip olayların ortaya çıkma olasılığını veya tekrerrünü yansıtmalıdır.

Frekans analizinin öncelikli amacı olasılık dağılımlarını kullanarak ekstrem olayların büyüklükleri ile ortaya çıkma sıklıklarını ilişkilendirmektir (Chow ve diğ., 1988). Frekans analizinde, belli bir periyotta ölçülmüş meteoroloji veya akım gözlemlerinin bağımsız ve aynı dağılıma ait oldukları varsayılmaktadır.

Frekans analizi üç temel adımdan oluşmaktadır:

- i. İncelenen olaya ait basit ve mantıklı bir olasılık dağılım modelinin tanımlanması,
- ii. Tanımlanan dağılım modelinin parametrelerinin tahmini ve
- iii. İncelenen olaya ait riskin uygun bir hassasiyet düzeyinde tahmin edilmesi.

Rastgele değişkenin toplumunu tümüyle gözlemlemek mümkün olmadığından, olasılık dağılımının eldeki örnekten elde edilen dağılıma eşdeğer olduğu varsayılmaktadır. Bu dağılımların performansı farklı istatistiksel testler kullanılarak değerlendirilmektedir (Rao ve Hamed, 2000).

Öte yandan her teorik olasılık dağılım fonksiyonunun belli sayıda parametresi bulunmaktadır ve bu parametreler eldeki örnekten çeşitli metotlarla elde edilmektedir. Bu metotların başlıcaları Momentler metodu (MOM), Maksimum Olabilirlik metodu (MLM), Olasılık Ağırlıklı Momentler metodu (PWM), En Küçük Kareler metodu (LSM) ve Genelleştirilmiş Momentler metodu (GMM) gibi metotlardır. Pratikte en çok kullanılan üç tanesi Momentler metodu (MOM), Maksimum Olabilirlik metodu (MLM) ve Olasılık Ağırlıklı Momentler metodudur (PWM), (Rao ve Hamed, 2000).

Momentler metodunun (MOM) kim tarafından geliştirildiğini söylemek zor da olsa, Johan Bernoulli (1667-1748) bu metodu çalışmalarında kullanan ilk araştırmacılardan biridir (Van Gelder, 2004). MOM metodu oldukça basit bir parametre tahmin metodudur. Genellikle MOM metoduyla elde edilen parametre tahminleri, bilhassa çok parametrelili dağılımlar (üç veya daha fazla) için, MLM metoduyla elde edilen tahminler kadar etkili olmamaktadır. Bunun sebebi, yüksek dereceden momentlerin küçük örneklerde oldukça taraflı olmalarındandır (Rao and Hamed, 2000).

Maksimum Olabilirlik metodu (MLM) ile ilgili en eski bilgiler Daniel Bernoulli (1700-1782) tarafından aktarılmıştır (Van Gelder 2004). MLM diğer metotlarla karşılaştırıldığında tahmin edilen parametrelerde en küçük örnekleme varyansını sağlamakta ve bu bakımdan en etkili metot sayılmaktadır. Yanlı tahminler vermesi MLM' nin zayıf yönü olarak gösterilmekle birlikte, bu sapmalar düzeltilebilmektedir. Küçük örneklerde ve bilhassa çok parametrelili dağılımlarda maksimum olabilirlik tahminlerini elde etmek imkânsız olabilmektedir.

Olasılık ağırlıklı momentler (PWM) metodu (Greenwood ve diğ., 1979; Hosking, 1986) MLM tahminleriyle kıyaslanabilecek derecede tahminler vermektedir. Bazı durumlarda parametre tahmin prosedürü daha az karmaşık ve hesaplamalar daha basittir. PWM metodunun zaman zaman MLM tahminlerinden daha doğru parametre tahminleri verdiği de ifade edilmiştir (Landwehr ve diğ., 1979).

Literatürde hidrolojik olayların frekans analizinde, farklı olasılık dağılım modellerinin ve farklı parametre tahmin metotlarının seçimi ve kullanımı konusunda çok sayıda çalışma yapılmıştır.

Strupczewski ve diğ. (2002) çalışmalarında Polonya'da yer alan 39 akarsuya ait 70 yıllık taşkın verilerini incelemişlerdir. Çalışmada, büyük olasılıklarda ve momentlerde yanlış olasılık dağılım fonksiyonu seçiminde ortaya çıkacak asimptotik sapmalar incelenmiş; parametre tahmininde maksimum olabilirlik (MLM), momentler metodu (MOM), L-Momentler metodu (LMM) ve en küçük kareler metodu (LSM) kullanılmıştır. İlk üç tahmin yöntemi Lognormal ve Gamma dağılımlarıyla kullanılarak olasılık dağılımları için alternatif bir grup oluşturulmuştur. Nispi hatanın MOM için en küçük, MLM için en büyük olduğu, L-Momentler (LMM) için ise ikisi arasında kaldığı saptanmıştır.

Kumar ve diğ. (2003) Orta-Ganga ovası için L-Moment diyagramlarını kullanarak frekans analizi yapmışlar, çalışma alanı için GEV dağılımını en güçlü dağılım olarak belirlemişlerdir. Bölgesel olasılık

dağılım fonksiyonunun belirlenmesinde tüm parametre tahmin metotlarını kapsayan “FLOOD” adlı yazılım kullanılmıştır. Van Gelder, (2004) çalışmasında farklı parametre tahmin metotlarının (Momentler metodu (MOM), Maksimum Olabilirlik metodu (MLM), Olasılık Ağırlıklı Momentler metodu (PWM), L-Moment metodu (LMM), En Küçük Kareler metodu (LSM), Minimum Çapraz Entropi metodu, Bayes Noktasal Tahmin metodu) kapsamlı bir karşılaştırmasını yapmıştır. Üstel dağılım simülasyonuna dayanarak elde edilen sonuçlara göre, Momentler metodu, Maksimum Olabilirlik metodu ve Bayes Noktasal Tahmin metodu belirgin bir biçimde En Küçük Kareler metodundan daha düşük tahminler vermektedirler.

Panda ve diğ. (2005) Doğu Hindistan’ da bulunan Mahandi havzasında bulunan 15 istasyonun maksimum akım verilerine frekans analizi uygulamıştır. Çalışmada kullandıkları yazılımla, Normal, 2- ve 3 parametrelili Lognormal, Gamma, Gumbel (max.), Gumbel (min), Weibull (WBL), Ekstrem değer Tip-III (EV3), GEV, Pearson (P), Log-Pearson (LP), Genelleştirilmiş Pareto (GPAR) ve Üstel (EXP) dağılımlarını değerlendirmişlerdir. Program, Momentler metodu (MOM), Maksimum Olabilirlik metodu (MLM), Olasılık Ağırlıklı Momentler metodu (PWM) ve Maksimum Entropi metodu gibi parametre tahmin metotlarından birini seçme opsiyonunu tanımaktadır. Çalışmada, tüm olasılık dağılım fonksiyonları ve parametre tahmin metotları arasından en iyi kombinasyonu GEV dağılımı ve PWM metodu vermiştir. İki parametrelili dağılımlar arasında (MOM tahmin metoduyla) en iyi sonucu Weibull dağılımının sağladığı tespit edilmiştir. Ayrıca PWM metodunun, bir veri setini olasılık dağılımına uyarlama konusunda en iyi parametre tahmin metodu olduğu gösterilmiştir.

Opere ve diğ. (2006), Ekvatorial Nil havzası ülkelerinin yer aldığı FRIEND/Nil projesi kapsamında GEV, Gumbel, Lognormal ve Log-Pearson Tip-3 dağılımlarını yıllık maksimum akım verilerine uyarlamışlardır. Olasılık dağılımlarının uyarlanması Momentler metodu (MOM), Maksimum Olabilirlik metodu (MLM), ve Olasılık Ağırlıklı Momentler metodu (PWM) kullanılmıştır. Bunun yanı sıra Q-Q noktalama analizinin sonuçları Ekvatorial Nil havzası taşkınlarına en uygun dağılım modeli olarak Gumbel dağılımını göstermiştir. Çoğu durum için Q-Q noktalama metodunun MOM, ML ve PWM gibi geleneksel parametre tahmin metotlarıyla çok yakın sonuçlar verdiği saptanmıştır.

Jee ve diğ. (2008), Kore’deki proje yağışlarının tahmin edilmesinde FARD adlı paket program ile frekans analizi yapmışlardır. Bu program, üç farklı parametre tahmin metodunu (MOM, MLM ve PWM) ve dokuz farklı olasılık dağılım fonksiyonunu (Normal, LN2, Gamma, LP3, GEV, Gumbel, Log-Gumbel, Weibull ve Wakeby) test ederek olası yağışı tahmin etmektedir. Çalışmada, Kore’de bulunan Daegu, Busan ve Andong istasyonlarının ve 8 ülkeden oluşan Asya Pasifik Friend ülkelerinde bulunan 40 istasyonun yağış verilerinin frekans analizi yapılmıştır. Sonuç olarak, Kore’deki istasyonlar için Gumbel dağılımı ve PWM metodu en uygun kombinasyonu sağlamıştır. Asya Pasifik Friend ülkeleri için de PWM metodu ve farklı olasılık dağılım fonksiyonları uygulanmıştır.

Saf (2009), Batı Akdeniz Havzalarında 47 istasyondan taşkın frekans tahminleri elde etmeyi amaçlamıştır. Bölgesel taşkın frekansı tahminleri üç alt bölge için yedi farklı olasılık dağılım modeli kullanılarak yapılmıştır (GLO, GEV, N, P3, GPA, Wakeby and Kappa). L-moment uygunluk istatistiği, Antalya ve Alt Batı Akdeniz alt bölgelerinde en uygun olasılık dağılımı olarak P3 dağılımını, Üst Batı Akdeniz alt bölgesi için ise GLO dağılımını göstermiştir.

Haktanır ve diğ. (2010) 5dk. – 24sa. lik yıllık maksimum yağış serilerinin frekans analizinde (1) Momentler, (2) Maksimum Olabilirlik, (3) Olasılık ağırlıklı momentler (PWM) ve (4) Kendinden tanımlı PWM parametre tahmin metotlarını kullanmışlar ve Gumbel, GEV, 3-parametrelili lognormal (LN3), Pearson-3 ve Log-Pearson-3 olasılık dağılım fonksiyonlarını verilere uyarlamışlardır. Çalışma sonucunda, tek bir olasılık dağılımının diğer dağılımlara bariz bir üstünlük sağlayamadığı vurgulanmış, bununla birlikte GEV dağılımının Türkiye maksimum yağışlarına iyi uyum sağladığı belirtilmiştir.

Rahman ve diğ. (2013) Avustralya’daki pik akım serilerine dayanan 15 frekans dağılımının uygunluğunu incelemeye çalışmışlar, en uygun olasılık dağılımın belirlenmesinde Anderson-Darling testi, Kolmogorov-Smirnov testi, bayes bilgi kriteri (BIC), Akaike bilgi kriteri (AIC) ve L-Moment oranı diyagramlarını kullanmışlardır. Avustralya’nın bütün eyaletlerinde pik akımlar için tek bir ana frekans

dağılım modeli tespit edilemediğini, bununla birlikte, P3, GEV ve GPA dağılımlarının en uygun dağılımlar olarak ortaya çıktığını belirtmişlerdir.

Atroosh and Moustafa (2012) Wadi Bana akışlarının dağılımını modellemek için Gamma, Weibull, Pearson 6, Rayleigh, Beta, Kumaraswamy ve Üstel dağılımlarını test etmişlerdir. En uygun olasılık dağılımını belirlemek amacıyla Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling ve Ki-kare testlerini kullanmışlardır. Gerek yaz gerekse sonbahar mevsimleri için Yemen'in Abyan Deltasında yer alan Wadi Bana akımlarına en uygun dağılımın Gamma olduğu, bunu Weibull dağılımının takip ettiği saptanmıştır.

Salinas ve diğ. (2014) 15 Avrupa ülkesinde 4.105 istasyonun yıllık en büyük akımlarından oluşan bir veri tabanı kullanarak Avrupa ölçeğinde bir ana olasılık dağılım modeli bulmaya çalışmışlardır. L-Moment oranı diyagramlarıyla GEV dağılımının Avrupa pik akımları için potansiyel bir ana olasılık dağılımı potansiyeli taşıdığını saptamışlar, ancak yapılan Monte Carlo simülasyonları sonrasında Avrupa pik akımlarının tek bir olasılık dağılım modeliyle temsil edilemediği sonucuna ulaşmışlardır.

Ahmad vd. (2016) Pakistan'da taşkın frekansı analizi için yıllık pik akım serilerinin en uygun olasılık dağılımını belirlemek için çeşitli parametre tahmin yöntemlerini (L-Momentler, TL-Momentler, Maksimum Olabilirlik) karşılaştırmışlardır. En uygun olasılık dağılımı olasılık noktalama korelasyon katsayısı (PPCC) testi, Anderson Darling (AD) testi ve her bir istasyon için L-momentleri diyagramı kullanılarak belirlenmiştir. Çalışma sonuçlarına göre, istasyonların çoğu için en uygun olasılık dağılımı olarak GPA belirlenmiş, bunu sırasıyla GLO ve GEV izlemiştir.

Bu çalışmada önerilen Robust İstatistikler Metodu (RİM), olasılık dağılım fonksiyonunun parametrelerini tahmin etmede alternatif bir metot olarak öne sürülmüştür. RİM, farklı olasılık dağılım fonksiyonlarının parametrelerini tahmin ederken medyan (M), kuartiller arası uzaklık (IQR) ve kuantil çarpıklık katsayısı (QC_3) gibi robust istatistikleri kullanmaktadır. Farklı formlara sahip olasılık fonksiyonlarının merkez değerini belirlemede, medyanın en uygun istatistik olduğu ifade edilebilmektedir. Medyan, özellikle veri dizilerindeki aykırı değerlerden etkilenmemesi açısından robust (sağlam) bir istatistik olarak tanımlanmaktadır (Reimann ve diğ., 2008). IQR merkez değer etrafındaki saçılımı güçlü bir biçimde tanımlamakta, çarpık ve aykırı değerlere sahip veri dizilerin incelenmesinde robust bir istatistik olarak öne çıkmaktadır.

Çalışma kapsamında olasılık dağılım modellerinden Normal, 2- ve 3-parametrelili lognormal, Gamma, Gumbel ve GEV dağılımları ele alınacaktır. Frekans analizinde belli olasılıklara karşı gelen tahminler, Robust İstatistikler Metodu (RİM), Momentler Metodu (MOM), Maksimum Olabilirlik Metodu (MLM) ve Olasılık Ağırlıklı Momentler (PWM) metodu ile elde edilen parametreler kullanılarak hesaplanacaktır. Belli olasılıklı tahminlerin başarısı, her yöntem için hem grafiksel olarak hem de kuadratik ortalama hataları (root mean square error: RMSE) yöntemleriyle değerlendirilecektir.

YÖNTEMLER (METHODS)

Olasılık Dağılım Fonksiyonları (Probability Distribution Functions)

Bir veri dizisine olasılık dağılımı uyarlamak, incelenen olayın olasılığını belirlemede veya belli bir sıklıkta (veya periyotta) görülecek olayın büyüklüğünü belirlemede büyük önem taşımaktadır.

İncelenen olayın karakteristiklerine veya dağılımına bağlı olarak, gözlenen olayın frekansını temsil etmek üzere pek çok olasılık dağılım fonksiyonu bulunmaktadır. Olasılık dağılımının uyumu, başarılı tahminler yapılması açısından önem arz etmektedir.

Rao ve Hamed (2000), hidrolojik frekans analizinde yaygın olarak kullanılan çoğu olasılık dağılımının matematiksel yapısıyla ilgili kapsamlı bir çalışma sunmuşlardır. Bu çalışma kapsamında, ilgili olasılık dağılım modellerinden altı tanesi ele alınacaktır (Normal, 2- ve 3-parametrelili lognormal, Gamma, Gumbel ve GEV).

Parametre Tahmin Metotları (Parameter Estimation Methods)

Klasik parametre tahmin metotları (Conventional parameter estimation methods)

Maksimum olabilirlik yöntemi (MLM) frekans analizinde kullanılan en klasik parametre tahmin yöntemlerinden biridir. Olasılık dağılım fonksiyonu ($f(x)$) bilinen bir rastgele değişkenin X olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \quad (1)$$

Eşitlikte θ , bilinmeyen parametrelerin vektörünü, n ise rastgele değişkenin örnek büyüklüğünü ifade etmektedir. Burada amaç eldeki veri seti için olabilirlik fonksiyonunu $L(\theta)$ maksimize etmektir. Parametre sayısı m olmak üzere, olabilirlik fonksiyonu $L(\theta)$ nın m adet kısmi türevi alınarak bunlar sıfıra eşitlenecektir. Bu eşitliklerin çözülmesiyle θ parametre setinin maksimum olabilirlik (ML) tahminleri elde edilecektir. Bunlar genellikle iteratif yapısı nedeniyle çözümü karmaşık algoritmalar gerektiren, doğrusal olmayan eşitliklerdir (Haktanır, 1991; Kottegoda ve Rosso, 2008).

Momentler yöntemi (MOM) de yine sık kullanılan ve oldukça pratik bir parametre tahmin yöntemidir. Bu yöntemde, m -parametrelili bir dağılımda dağılımın ilk m momenti, ilk m örnek momentine eşitlenmektedir. Bu m adet eşitliğin birlikte çözülmesiyle parametreler elde edilmektedir.

Olasılık ağırlıklı momentler (PWM) de olasılık yoğunluk fonksiyonunu tanımlamada kullanılan bir diğer yaygın metottur. Rastgele bir değişkenin olasılık ağırlıklı momentleri Greenwood ve diğ. (1979) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$M_{ijk} = E\left[X^i \{F_x(x)\}^j \{1 - F_x(x)\}^k\right] \quad (2)$$

Burada $F(\cdot)$ rastgele değişkenin kümülatif fonksiyonu, $E[\cdot]$ ise parantez içerisindeki ifadenin beklenen değeridir. Klasik anlamda (2) eşitliği $j=k=0$ olmak üzere i . sıradaki momentleri verir. Genellikle uygulamada $i=1$ olarak kabul edilir ve $k=0$ ya da $j=0$ dır. Momentler metodunda olduğu gibi olasılık ağırlıklı momentlerin (PWM) ilk m örneği, (2) eşitliğinden elde edilen ilk m toplum momentine eşitlenmektedir. Bu m adet eşitliğin birlikte çözülmesiyle dağılımın parametreleri elde edilmektedir.

Robust istatistikler metodu (RİM) (Robust statistics method)

Hidrolojik veriler sıklıkla gözlem dizisindeki genel yığılmanın oldukça uzağında kalan aykırı değerler ihtiva ederler. Dizilerdeki aykırı değerlerin sebebi ölçüm ya da kayıt hataları olabildiği gibi, gerçekten meydana gelmiş anormal bir olay da olabilir. Bilhassa küçük örneklerde aykırı değerler, önemli istatistiklerin gözlemlerin büyük bir kısmını temsil eden değerlerden uzaklaşmasına neden olmaktadır. Bu problemten, aykırı değerlere karşı robust (sağlam, dayanıklı) istatistiklerin kullanılması yoluyla kaçınılabilir (Stephenson, 2005).

Bu çalışmada önerilen ve alternatif bir parametre tahmin yöntemi olan Robust İstatistikler Metodunda (RİM), önce veri dizisinde %25, %50, %75 olasılık değerlerine denk gelen kuantiller ($x_{0.25}$, $x_{0.50}$, $x_{0.75}$) kullanılarak M (medyan), IQR (kuartiller arası uzaklık) ve QC_s (kuantil çarpıklık katsayısı) aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$M = x_{0.5} \quad (3)$$

$$IQR = x_{0.75} - x_{0.25} \quad (4)$$

$$QC_s = \frac{(x_{0.75} - x_{0.5}) - (x_{0.5} - x_{0.25})}{x_{0.75} - x_{0.25}} = \frac{x_{0.75} + x_{0.25} - 2M}{IQR} \quad (5)$$

Bu istatistikler ile olasılık dağılımlarının parametreleri arasındaki matematiksel ifadeler bir sonraki bölümde verilmektedir.

Farklı olasılık dağılım model parametrelerinin Robust İstatistikler Metodu ile tahmini (The parameter estimation of different probability distribution models with robust statistics method)

Bu çalışma kapsamında altı adet olasılık dağılımı (Normal, 2- ve 3-parametrelili lognormal, Gamma, Gumbel ve GEV) ele alınmıştır.

I. Normal Dağılım

Yıllık yağış gibi birbirinden bağımsız olayların toplamından oluşan hidrolojik değişkenler, normal dağılımı izleme eğilimindedirler. Verilen bir P olasılığı için normal dağılımın kuantil fonksiyonu x_p şu şekilde tanımlanır:

$$x_p = \mu_x + z_p \cdot \sigma_x \quad (6)$$

Burada μ_x ve σ_x dağılım parametreleri, z_p ise P aşılma olasılığına karşılık gelen standart normal değişkendir. Normal dağılımın kuantil fonksiyonunu medyan ve kuartiller arası uzaklık için tanımlayacak olursak,

$$M = x_{0.5} = \mu_x + z_{0.5} \cdot \sigma_x = \mu_x \quad (7)$$

$$IQR = x_{0.75} - x_{0.25} = (M + z_{0.75} \cdot \sigma_x) - (M + z_{0.25} \cdot \sigma_x) \quad (8)$$

normal dağılımın parametreleri kolayca hesaplanabilmektedir:

$$\mu_x = M \quad (9)$$

$$\sigma_x = 0.7413 \cdot IQR \quad (10)$$

II. İki parametrelili lognormal dağılım (LN2)

Ekstrem yağışlar gibi pek çok hidrolojik süreç, sıfır alt sınırına sahip pozitif çarpık rastgele değişken süreçlerdir (Stedinger ve diğ. 1993). İki parametrelili lognormal dağılım (LN2), yukarıda bahsedilen süreç özelliklerini tümüyle sağladığından çeşitli hidrolojik olayların verilerine sıklıkla uyarlanmaktadır. Lognormal dağılımlı bir x değişkeninin, iki parametrelili kuantil fonksiyonu, y_p , şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$y_p = \mu_y + z_p \cdot \sigma_y \quad (11)$$

Bu eşitlikte μ_y ve σ_y x' in doğal logaritmasının ($y = \ln(x)$) parametreleri; z_p ise P aşılma olasılığı için hesaplanan standart normal değişkendir. Lognormal dağılımın kuantil fonksiyonunu medyan ve kuartiller arası uzaklık için tanımladığımızda,

$$M_y = \ln(M) = y_{0.5} = \mu_y + z_{0.5} \cdot \sigma_y = \mu_y \quad (12)$$

$$IQR_y = y_{0.75} - y_{0.25} = (\mu_y + z_{0.75} \cdot \sigma_y) - (\mu_y + z_{0.25} \cdot \sigma_y) \quad (13)$$

dağılımın parametreleri aşağıdaki şekilde ortaya çıkmaktadır:

$$\mu_y = \ln(M) \quad (14)$$

$$\sigma_y = 0.7413 \cdot IQR_y \quad (15)$$

III. Üç parametrelili lognormal dağılım (LN3)

Üç parametrelili lognormal dağılımın iki parametrelili lognormal dağılımdan farkı, gibi dağılımın alt sınırını tanımlayan üçüncü bir parametreye (x_0) sahip olmasıdır. Lognormal dağılımlı bir x değişkeninin, üç parametrelili kuantil fonksiyonu x_p aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$x_p = x_0 + e^{\mu_y + z_p \cdot \sigma_y} \quad (16)$$

Bu eşitlikte μ_y ve σ_y x' in doğal logaritmasının ($y = \ln(x)$) parametreleri; z_p ise P aşılma olasılığı için hesaplanan standart normal değişkendir. Üç parametrelili lognormal dağılımın kuantil fonksiyonunu medyan, kuartiller arası uzaklık için tanımladığımızda,

$$M = x_{0.5} = x_0 + e^{\mu_y + 0 \cdot \sigma_y} = x_0 + e^{\mu_y} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} IQR &= x_{0.75} - x_{0.25} = x_0 + e^{\mu_y + z_{0.75} \cdot \sigma_y} - x_0 - e^{\mu_y + z_{0.25} \cdot \sigma_y} = e^{\mu_y} \cdot e^{0.6745 \cdot \sigma_y} - e^{\mu_y} \cdot e^{-0.6745 \cdot \sigma_y} \\ &= e^{\mu_y} \left[e^{0.6745 \cdot \sigma_y} - e^{-0.6745 \cdot \sigma_y} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Üç parametrelili bir dağılım olduğundan parametrelerin tanımlanmasında üçüncü bir denkleme ihtiyaç duyulmaktadır ve bunun için kuantil çarpıklık katsayısı (QC_s) ifadesi kullanılmaktadır.

$$\begin{aligned} QC_s &= \frac{x_{0.75} + x_{0.25} - 2M}{IQR} = \frac{x_0 + e^{\mu_y + z_{0.75} \cdot \sigma_y} + x_0 - e^{\mu_y + z_{0.25} \cdot \sigma_y} - 2x_0 - 2e^{\mu_y}}{x_0 + e^{\mu_y + z_{0.75} \cdot \sigma_y} - x_0 - e^{\mu_y + z_{0.25} \cdot \sigma_y}} \\ &= \frac{e^{\mu_y} \left[e^{0.6745 \cdot \sigma_y} + e^{-0.6745 \cdot \sigma_y} - 2 \right]}{e^{\mu_y} \left[e^{0.6745 \cdot \sigma_y} - e^{-0.6745 \cdot \sigma_y} \right]} = \frac{e^{0.6745 \cdot \sigma_y} + e^{-0.6745 \cdot \sigma_y} - 2}{e^{0.6745 \cdot \sigma_y} - e^{-0.6745 \cdot \sigma_y}} \end{aligned} \quad (19)$$

σ_y , (19) eşitliğinden çekilmekte, dağılımın diğer iki parametresi, aşağıdaki eşitliklerle hesaplanmaktadır.

$$\mu_y = \ln \left[\frac{IQR}{e^{0.6745 \cdot \sigma_y} - e^{-0.6745 \cdot \sigma_y}} \right] \quad (20)$$

$$x_0 = M - e^{\mu_y} \quad (21)$$

IV. Gamma Dağılımı

İki parametrelili Gamma dağılımı, Pearson Tip 3 dağılımının alt sınırı sıfır olan özel bir halidir. Belli çarpıklığa sahip hidrolojik değişkenlerin log-dönüşüm gerektirmeden başarıyla ifade edilmesini sağlar (Chow ve diğ., 1988). Abramowitz ve Stegun (1984) $y = x/\alpha$ olmak üzere, aşılma olasılığını aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır:

$$P(y) = P(\chi^2 | \nu) \quad (22)$$

Burada $P(\chi^2 | \nu)$, serbestlik derecesi $\nu = 2\beta$ olan ki-kare dağılımıdır ve $\chi^2 = 2y'$ dir. Kendall ve Stuart (1963) standart normal değişkeni aşağıdaki şekilde ifade etmişlerdir:

$$z = \left[\left(\frac{\chi^2}{\nu} \right)^{1/3} + \frac{2}{9\nu} - 1 \right] \left(\frac{9\nu}{2} \right) \quad (23)$$

z , $\nu > 30$ durumunda yaklaşık olarak normal dağılımlıdır. χ^2 , (23) eşitliğinden çekilerek,

$$\chi^2 = \nu \left[1 - \frac{2}{9\nu} + z_p \sqrt{\frac{2}{9\nu}} \right]^3 \quad (24)$$

ifadesiyle tanımlanır. Burada z_p , aşılma olasılığı P olan standart normal değişkeni tanımlamaktadır. Kuantil fonksiyonu, $\nu = 2\beta$, $\chi^2 = 2y$ ve $x = y \cdot \alpha$ ifadeleri birlikte kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılır:

$$x_p = \alpha \beta \left[1 - \frac{1}{9\beta} + z_p \sqrt{\frac{1}{9\beta}} \right]^3 \quad (25)$$

Medyan ve IQR istatistikleri (25) eşitliğine göre

$$M = x_{0.5} = \alpha \cdot \beta \left[1 - \frac{1}{9\beta} + z_{0.5} \sqrt{\frac{1}{9\beta}} \right]^3 = \alpha \cdot \beta \left[1 - \frac{1}{9\beta} \right]^3 \quad (26)$$

$$IQR = \alpha \cdot \beta \cdot \left\{ \left[1 - \frac{1}{9\beta} + z_{0.75} \sqrt{\frac{1}{9\beta}} \right]^3 - \left[1 - \frac{1}{9\beta} + z_{0.25} \sqrt{\frac{1}{9\beta}} \right]^3 \right\} \quad (27)$$

şeklinde yazılırlar. β parametresi (28) numaralı eşitlikten deneme yanılma yöntemiyle çekilecektir.

$$\frac{IQR}{M} = \frac{\left\{ \left[1 - \frac{1}{9\beta} + z_{0.75} \sqrt{\frac{1}{9\beta}} \right]^3 - \left[1 - \frac{1}{9\beta} + z_{0.25} \sqrt{\frac{1}{9\beta}} \right]^3 \right\}}{\left[1 - \frac{1}{9\beta} \right]^3} \quad (28)$$

α parametresi ise (29) eşitliğiyle tanımlanmıştır.

$$\alpha = \frac{M_x}{\beta \left[1 - \frac{1}{9\beta} \right]^3} \quad (29)$$

V. Gumbel Dağılımı

Gumbel dağılımı (Gumbel, 1958), maksimum olayları temsil etmedeki başarısından dolayı özellikle yağışların şiddet-süre-tekerrür ilişkilerinin tanımlanmasında yaygın bir biçimde kullanılır (Koutsoyiannis ve diğ., 1998). Pozitif çarpıklığa ($C_s=1.14$) sahip olan Gumbel dağılımının kuantil fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$x_p = \beta - \alpha \cdot \ln[-\ln(P)] \quad (30)$$

Burada α ve β dağılımın parametreleri olup, P aşılma olasılığıdır. Medyan ve IQR istatistiklerinin kuantil denklemine yerleştirilmesiyle,

$$M = x_{0.5} = \beta - \alpha \cdot \ln[-\ln(0.5)] = \beta + 0.3665 \cdot \alpha \quad (31)$$

$$IQR = x_{0.75} - x_{0.25} = \{\beta - \alpha \cdot \ln[-\ln(0.75)]\} - \{\beta - \alpha \cdot \ln[-\ln(0.25)]\} = 1.5725 \cdot \alpha \quad (32)$$

ifadeleri elde edilmiştir. Dağılımın parametreleri ise

$$\alpha = 0.636 \cdot IQR \quad (33)$$

$$\beta = M - 0.233 \cdot IQR. \quad (34)$$

eşitlikleriyle hesaplanmaktadır.

VI. GEV Dağılımı

Genelleştirilmiş ekstrem değer dağılımı da olarak tanımlanan GEV dağılımı, hidrolojide maksimum ve minimum olayların doğasını temsil etmede ön plana çıkmaktadır. Dağılımın kuantil fonksiyonu

$$x_p = u + \frac{\alpha}{k} \left[1 - \{-\ln(P)\}^k \right] \quad (35)$$

ifadesiyle tanımlanmaktadır. u , α ve k dağılımın parametreleri olup, P aşılma olasılığını göstermektedir. Üç parametrelili olan bu dağılımın parametrelerinin hesabında üç farklı denkleme ihtiyaç duyulmaktadır. Medyan (M) ve IQR istatistiklerinin yanı sıra, QC_s , kuantil çarpıklık katsayısı için de kuantil fonksiyonu ifadesi yazılacaktır.

$$M = x_{0.5} = u + \frac{\alpha}{k} \left[1 - \{-\ln(0.5)\}^k \right] = u + \frac{\alpha}{k} \left[1 - 0.6932^k \right] \quad (36)$$

$$\begin{aligned} IQR &= x_{0.75} - x_{0.25} = u + \frac{\alpha}{k} \left[1 - \{-\ln(0.75)\}^k \right] - u - \frac{\alpha}{k} \left[1 - \{-\ln(0.25)\}^k \right] \\ &= \frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha 0.2877^k}{k} - \frac{\alpha}{k} + \frac{\alpha 1.3863^k}{k} = \frac{\alpha}{k} \left[1.3863^k - 0.2877^k \right] \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} QC_s &= \frac{x_{0.75} + x_{0.25} - 2M}{IQR} = \frac{u + \frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha 0.2877^k}{k} + u + \frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha 1.3863^k}{k} - 2u - 2\frac{\alpha}{k} + 2\frac{\alpha}{k} \left[0.6932^k \right]}{\frac{\alpha}{k} \left[1.3863^k - 0.2877^k \right]} \\ &= \frac{2(0.6932)^k - 0.2877^k - 1.3863^k}{1.3863^k - 0.2877^k} \end{aligned} \quad (38)$$

k parametresi (38) denkleminde deneme-yanılma ile çekilir. α ve u parametreleri de

$$\alpha = \frac{k \cdot IQR}{\left[1.3863^k - 0.2877^k \right]} \quad (39)$$

$$u = M - \frac{\alpha}{k} \left[1 - 0.6932^k \right] \quad (40)$$

denklemlerinden hesaplanır.

Parametre Tahmin Metotlarının Karşılaştırılması (Comparison of Parameter Estimation Methods)

Bu çalışmada anlatılan Robust İstatistikler Metodunun ($\hat{R}IM$) ve diğer üç klasik parametre tahmin metodunun performansları kuadratik ortalama hataları ($RMSE$) kriteri yardımıyla karşılaştırılacaktır.

$$RMSE = \left[\sum_{i=1}^N (I_i - \hat{I}_i)^2 / N \right]^{1/2} \quad (41)$$

Bu eşitlikte N gözlem sayısı, I_i , 24 saatlik gözlenmiş yağış şiddetleri, \hat{I}_i , alternatif parametre tahmin yöntemlerinden (ML , MOM , PWM ve $\hat{R}IM$) hesaplanan parametreler kullanılarak $T=1/(1-P_i)$ ampirik tekerrür aralığı için tahmin edilen yağış şiddetleridir. Ampirik aşılma olasılıkları, P_i ler, Gumbel ve GEV dağılımları için Gringorten'in, Normal, lognormal 2, lognormal 3 ve Gamma dağılımları içinse Blom'un önerdiği formüllerle hesaplanmıştır.

UYGULAMA ve BULGULAR (APPLICATION AND FINDINGS)

Çalışma kapsamında sayısal uygulamalar Ege Bölgesinde yer alan altı yağış istasyonunun (Muğla, Aydın, Kütahya, Çeşme, İzmir, Manisa) 24 saatlik yıllık maksimum yağış şiddeti verileriyle gerçekleştirilmiştir. Bu altı istasyonun seçiminde, incelenen altı farklı olasılık dağılımının (Normal, 2- ve

3-parametrelili lognormal, Gamma, Gumbel ve GEV) verilere uygunluğu esas alınmıştır. Olasılık dağılımlarının uygunluk sınamaları ki-kare (X^2), Kolmogorov-Smirnov (K-S) ve Anderson-Darling (A-D) testleriyle %10 anlamlılık düzeyinde gerçekleştirilmiştir. İstasyonlara ait yağış şiddetlerinin tanımlayıcı istatistikleri Çizelge 1 de gösterilmiştir. Çizelge 1 de N , istasyondaki veri uzunluğunu, \bar{x} , S_x , C_{vx} , C_{sx} , M , IQR ve QC_s ise sırasıyla yağış şiddetlerinin ortalama, standart sapma, değişkenlik katsayısı, çarpıklık katsayısı, medyan, kuartiller arası uzaklık ve kuantil çarpıklık katsayısını göstermektedir.

Çizelge 1. İstasyonlarda kaydedilen yağış şiddetlerinin tanımlayıcı istatistikleri

Table 1. Descriptive statistics of rainfall intensities recorded at stations

Yağış İstasyonu	Uygun ODF	N	\bar{x}	S_x	C_{vx}	C_{sx}	M	IQR	QC_s
Muğla	N	45	3,80	1,25	0,33	0,03	3,74	1,44	0,04
Aydın	LN2	38	1,95	0,67	0,34	1,09	1,97	0,73	-0,32
Kütahya	LN3	48	1,48	0,34	0,23	0,45	1,43	0,50	0,09
İzmir	GUM	57	2,70	0,85	0,32	1,00	2,59	1,03	0,07
Manisa	GEV	37	2,51	0,91	0,36	1,84	2,33	0,79	0,05
Çeşme	GAM	33	2,53	0,98	0,39	0,96	2,48	1,31	0,02

Bundan sonra, her istasyon için ilgili olasılık dağılım fonksiyonuna ait dağılım parametreleri, klasik parametre tahmin metotlarıyla (ML, MOM ve PWM) ve Robust İstatistikler Metoduyla (RSM) Bölüm 2.2 de anlatıldığı şekilde hesaplanmıştır. Kuantiller her bir metodun hesapladığı parametreler kullanılarak $T_i=1/(1-P_i)$ ampirik olasılıkları için hesaplanmıştır. Sonuç olarak, bahsedilen dört farklı parametre tahmin yönteminin performansını karşılaştırmak amacıyla kuadratik ortalama hataları (RMSE) hesaplanmıştır. Tahmin edilen dağılım parametreleri ve kuantillerin RMSE değerleri Çizelge 2' de gösterilmiştir.

Çizelge 2. Altı istasyonun verileriyle hesaplanan dağılım parametreleri ve RMSE değerleri

Table 2. The distribution parameters and RMSE values calculated from the data of six stations

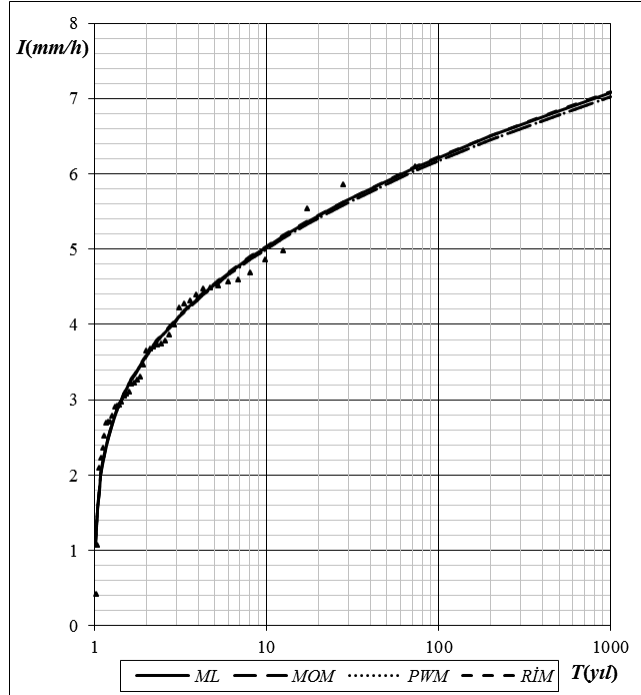
Muğla N				Aydın LN2				Kütahya LN3				
μ_x σ_x RMSE				μ_y σ_y RMSE				x_0 μ_y σ_y RMSE				
ML	3,59	1,13	0,182	ML	0,62	0,33	0,135	ML	-0,93	0,87	0,14	0,041
MOM	3,58	1,11	0,183	MOM	0,62	0,33	0,137	MOM	-0,74	0,79	0,15	0,041
PWM	3,58	1,11	0,183	PWM	0,62	0,33	0,136	PWM	0,07	0,32	0,22	0,048
RSM	3,60	1,13	0,182	RSM	0,62	0,33	0,135	RSM	-0,05	0,39	0,23	0,043

Çeşme Gamma				İzmir Gumbel				Manisa GEV				
α β RMSE				α u RMSE				α u k RMSE				
ML	0,35	7,28	0,194	ML	0,64	2,21	0,089	ML	0,58	2,08	-0,11	0,157
MOM	0,37	6,90	0,188	MOM	0,60	2,22	0,088	MOM	0,62	2,07	-0,09	0,153
PWM	0,38	6,69	0,186	PWM	0,63	2,21	0,086	PWM	0,52	2,05	-0,22	0,113
RSM	0,38	6,71	0,186	RSM	0,63	2,22	0,087	RSM	0,56	2,03	-0,21	0,111

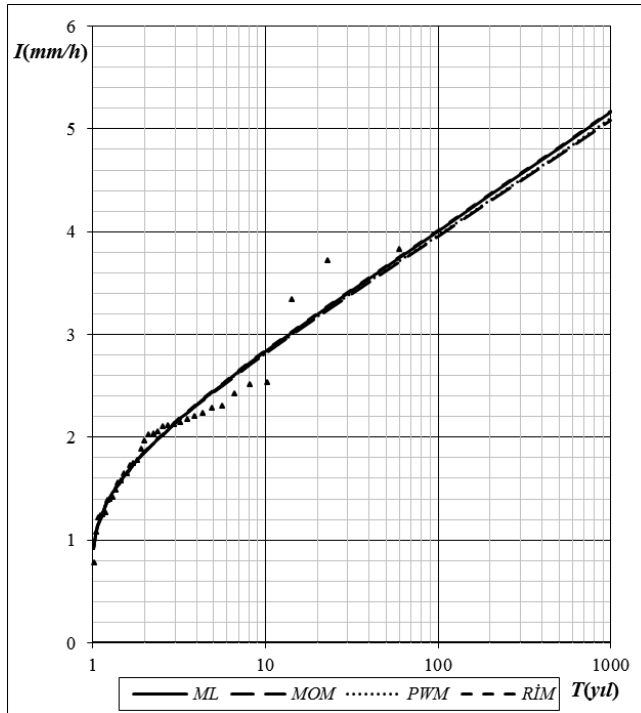
Çizelge 2 dikkatlice incelendiğinde, altı istasyonun (ya da altı olasılık dağılımının) kuantil tahminleri için hesaplanan RMSE değerlerinin dört farklı parametre tahmin yönteminde de yaklaşık sonuçlar verdiği görülmektedir.

Daha sonra parametre tahmin yönteminin, uzun periyotlarda nasıl etki yaratacağını izlemek amacıyla $T=1000$ yıla kadar bir süre için bu parametrelerle kuantil tahminleri yapılmıştır. Görsel

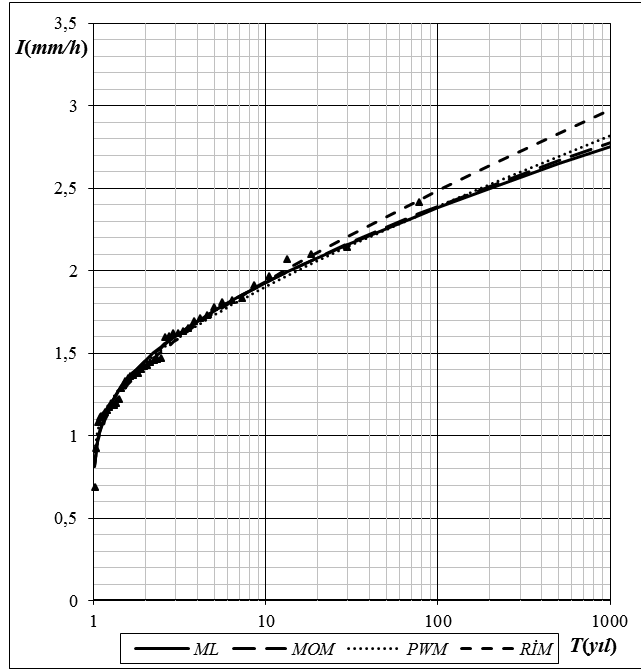
değerlendirme yapabilmek amacıyla altı istasyonun şiddet-tekerrür eğrileri Şekil 1 ila Şekil 6 da verilmiştir. Bu şekillerde eğriler farklı parametre tahmin metoduna, noktalar ise gözlenmiş yağış şiddetlerine karşılık gelmektedir.



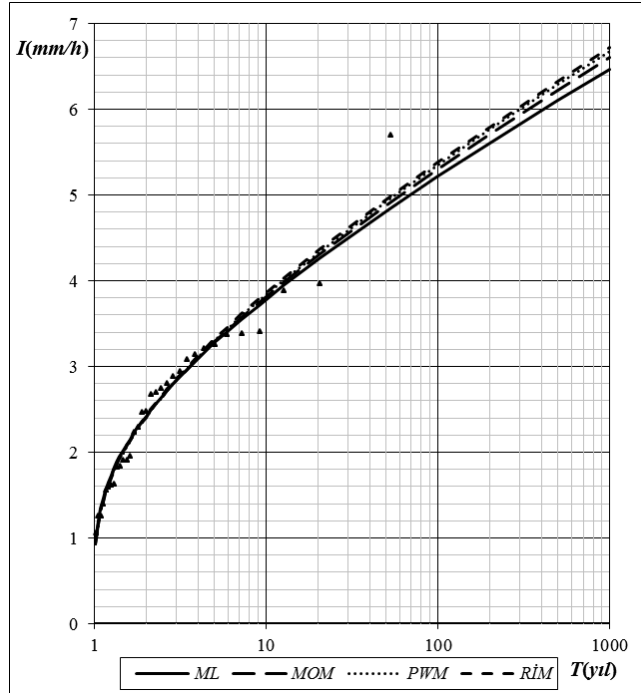
Şekil 1. Muğla istasyonu yağış şiddeti-tekerrür eğrisi (N)
Figure 1. Rainfall intensity-recurrence curve of Muğla station (N)



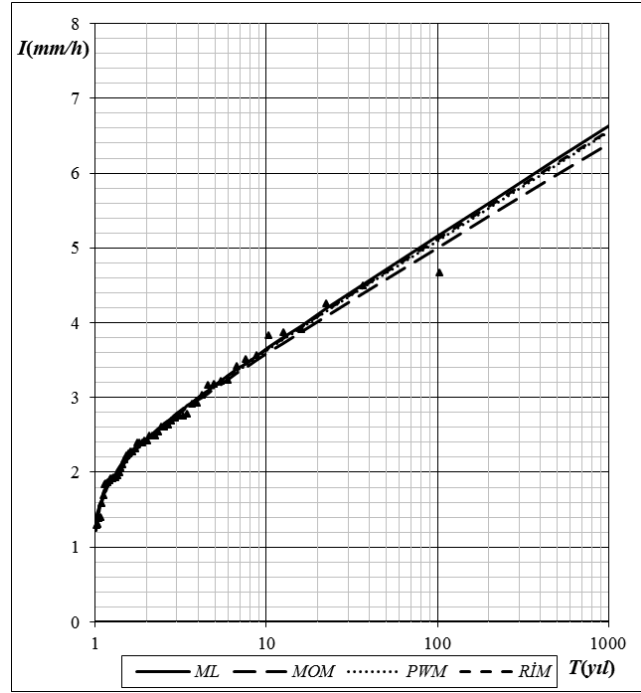
Şekil 2. Aydın istasyonu yağış şiddeti-tekerrür eğrisi (LN2).
Figure 2. Rainfall intensity-recurrence curve of Aydın station (LN2)



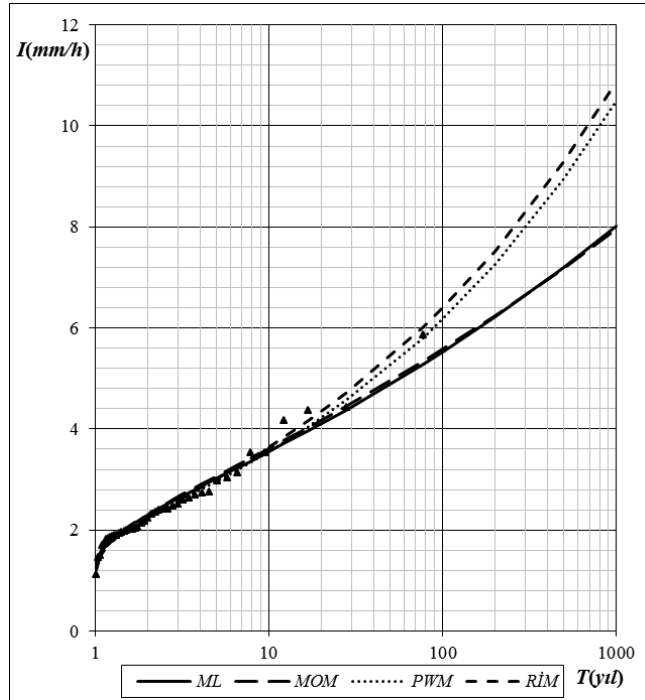
Şekil 3. Kütahya istasyonu yağış şiddeti-tekrür eğrisi (LN3)
Figure 3. Rainfall intensity-recurrence curve of Kütahya station (LN3)



Şekil 4. Çeşme istasyonu yağış şiddeti-tekrür eğrisi (Gamma)
Figure 4. Rainfall intensity-recurrence curve of Çeşme station (Gamma)



Şekil 5. İzmir istasyonu yağış şiddeti-tekrür eğrisi (Gumbel)
Figure 5. Rainfall intensity-recurrence curve of İzmir station (Gumbel)



Şekil 6. Manisa istasyonu yağış şiddeti-tekrür eğrisi (GEV)
Figure 6. Rainfall intensity-recurrence curve of Manisa station (GEV)

Genel olarak şekiller her altı istasyonda da (ve her altı dağılım için) şiddet-tekrür eğrilerinin birbirine yakın bir şekilde dizildiğini göstermektedir. Aynı zamanda hemen tüm eğrilerin, gözlem uzunluklarına ait ampirik periyotlarla (gözlenmiş yağış şiddetleriyle) uyumlu olduğu dikkat çekmektedir.

SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Frekans analizinde en önemli aşamalardan biri seçilen olasılık dağılım fonksiyonuna ait parametrelerin doğru bir şekilde tahmin edilmesidir. Bu çalışmada alternatif bir parametre tahmin metodu, RİM (Robust İstatistikler Metodu) sunulmuştur. Bu metot, farklı olasılık dağılımlarının parametre tahmininde medyan (M), kuantiller arası uzaklık (IQR) ve kuantil çarpıklık katsayısı (QC_s) istatistiklerini kullanmaktadır. Bu robust istatistiklerin kullanımıyla, aykırı gözlemlerin varlığından veya büyüklüğünden etkilenilmemesi amaçlanmaktadır.

Çalışmanın uygulama kısmında sayısal analizler Ege Bölgesinde yer alan altı yağış istasyonunun 24 saat süreli yıllık maksimum yağış şiddetleri kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Bu altı istasyon, incelenen olasılık dağılım fonksiyonlarına uygunlukları doğrultusunda aynı bölgede yer alan 23 istasyon arasından seçilmiştir.

Robust istatistikler kullanılarak elde edilen parametrelerin, diğer üç parametre tahmin metoduyla birbirine yakın sonuçlar verdiği (ML, MOM, PWM) Çizelge 2 de açıkça görülmektedir. Ampirik tekerrür aralıkları için hesaplanan kuantil tahminlerine ait kuadratik ortalama hataları (RMSE) incelendiğinde, önerilen metodun çoğu durumda dört metot arasında ilk iki sırada yer aldığı dikkat çekmektedir.

Her bir parametre tahmin metodunun parametreleriyle hesaplanan ve $T=1000$ yıllık periyoda kadar uzanan kuantiller, metotların uzun dönem performansları için de görsel olarak karşılaştırma imkânı vermektedir (Şekil 1 - Şekil 6). Şekiller incelendiğinde dört parametre tahmin yöntemiyle elde edilen yağış şiddet-tekkerrür eğrisinin genel olarak birbirine yakın olduğunu göze çarpmaktadır.

Bu çalışmada önerilen Robust İstatistikler Metodunun, incelenen dört parametre tahmin metodu sıralamasında genellikle en iyi iki metottan biri olduğu gözlenmiştir. Bunun yanında metodun performansının daha kesin bir şekilde ele alınması amacıyla sentetik veriler üretilerek daha detaylı analizlerin yapılması önerilmektedir.

REFERANSLAR (REFERENCES)

- Abramowitz, M., Stegun, I. A., 1984, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, A Wiley - Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Ahmad, I., Fawad, M., Akbar, M., Abbas, A., Zafar, H. 2016, "Regional Frequency Analysis of Annual Peak Flows in Pakistan Using Linear Combination of Order Statistics", *Polish Journal of Environmental Studies*, Vol. 25, 6.
- Atroosh, K.B., Moustafa, A. T., 2012, "An Estimation of the Probability Distribution of Wadi Bana Flow in the Abyan Delta of Yemen", *Journal of Agricultural Science*, Vol. 4, No. 6
- Chow, V. T., Maidment, D. R., Mays, L. W., 1988, *Applied Hydrology*, McGraw-Hill, New York.
- Greenwood, J. A., J. M. Landwehr, N. C. Matalas, J. R. Wallis, 1979, "Probability Weighted Moments: Definition and Relation to Parameters of Several Distributions Expressible in Inverse Form", *Water Resources Research*, Vol. 15, pp. 1049-1054.
- Gumbel, E. J., 1958, *Statistics of Extreme*, Columbia University Press, 375 pp.
- Haktanır, T., Cobaner, M., Kisi O., 2010, "Frequency Analyses of Annual Extreme Rainfall Series from 5 Min to 24 h", *Hydrological Processes*, Vol. 24, pp. 3574-3588
- Hosking, J. R. M. 1986, *The Theory of Probability Weighted Moments* Research Report RC12210, IBM Research Division, Yorktown Heights, N.Y.
- Jee, H. K., Yeo, W. K., Kim, J. H., Lee, S., 2008, *Rainfall Intensity Duration Frequency (IDF) Analysis for the Asia Pasific Region*, Chapter 8, 76-81, 'Technical Documents in Hydrology', No:2, Asian Pasific FRIEND, International Hydrological Programme, UNESCO Jakarta Office, Indonesia.
- Kendall, M. G., Stuart, A., 1961, *The Advance Theory of Statistics*, II, Griffin, London
- Koutsoyiannis, D., Kozonis, D., Manetas, A., 1998, "A Mathematical Framework for Studying Rainfall Intensity-Duration-Frequency Relationships", *Journal of Hydrology*, Vol. 206, pp. 118-135.

- Kottegoda, N. T., Rosso, R. 2008, *Applied Statistics for Civil and Environmental Engineers*, Second Edition, Blackwell Publishing.
- Kumar, R., Chatterjee, C., Kumar, S., Lohani, A. K., Singh, R. D. 2003, "Development of Regional Flood Frequency Relationships using L-moments for Middle Ganga Plains Subzone 1(f) of India", *Water Resources Management*, Vol. 17, pp. 243-257.
- Landwehr, J.M., Matalas, N.C., Wallis, J.R. 1979, "Probability Weighted Moments Compared with Some Traditional Techniques in Estimating Gumbel Parameters and Quantiles", *Water Resources Research*, Vol. 15 (5), pp. 1055-1064.
- Opere, A. O.; Mkhandi, S.; Willems, P. 2006, "At Site Flood Frequency Analysis for the Nile Equatorial Basins", *Physics and Chemistry of the Earth*, Vol. 31, Issue 15-16, pp. 919-927.
- Panda S. N. Panda, S. N., Dey, G. K., Kumar, S., 2005, "Flood Frequency Analysis in the Mahanadi River Basin (Eastern India)" - Developing an Interactive Software FLOOD", *ICID 21st European Regional Conference*, Frankfurt (Oder) and Slubice – Germany and Poland, 15-19 May, 2005.
- Rahman, A. S., Rahman, A., Zaman, M. A., Haddad, K., Ahsan, A., Imteaz, M. 2013, "A Study on Selection of Probability Distributions for at-site Flood Frequency Analysis in Australia", *Natural Hazards*, Vol. 69 (3).
- Rao, A. R., Hamed, K. H., 2000, *Flood Frequency Analysis*, CRC Pres, Boca Raton, USA.
- Reimann, C., Filzmoser, P., Garrett, R. G., Dutter R., 2008, *Statistical Data Analysis Explained: Applied Environmental Statistics with R*, John Wiley & Sons, Ltd. ISBN: 978-0-470-98581-6
- Saf, B., 2009, "Regional Flood Frequency Analysis Using L-Moments for the West Mediterranean Region of Turkey", *Water Resources Management*, Vol. 23, pp. 531-551.
- Salinas, J. L., Castellarin, A., Kohnova, S., Kjeldsen, T. R. 2014, "Regional Parent Flood Frequency Distributions in Europe – Part 1: Is the GEV Model Suitable as a Pan-European Parent?", *Hydrology and Earth System Sciences*, Vol. 18, pp. 4381-4389.
- Stedinger, J. R., Vogel, R.M., Fofoula-Georgiou, E., 1993, *Frequency Analysis of Extreme Events*, In: D. R. Maidment, *Handbook of Hydrology*, Chapter 18, McGraw-Hill, New York .
- Stephenson, D., 2005, *Data Analysis Methods in Weather and Climate Research*, Course in University of Reading.
- Strupczewski, W. G, Singh, V. P, Weglarczyk, S., 2002, "Asymptotic Bias of Estimation Methods Caused by the Assumption of False Probability Distribution", *Journal of Hydrology*, Vol. 258, Issues 1-4, 28 pp. 122-148.
- Van Gelder, P.H.A.J.M, 2004, "Statistical Estimation Methods in Hydrological Engineering, In: Analysis and Stochastic Modelling of Extreme Runoff in Euroasian Rivers under Conditions of Climate Change", *Proceedings International Scientific Seminar*, Irkutsk, pp. 11-57, 16-23 June 2003 Publishing House of the Institute of Geography Editors: L.M. Korytny and W.M. Luxemburg, ISBN 5-94797-040-6